**Macierz zerowa** – wszystkie element są równe zeru

Wektor zerowy – macierz zerowa z tylko jedną kolumną

**Ślad macierzy** – suma elementów diagonalnych (trace())

**Macierz diagonalna** – macirz kwadratowa, której elementy poza przekątną maja wartość 0

Macierz skalarna (s) – wszystkie elementy diagonalne są róne pewnej stałej c

Wyznacznik macierzy diagonalnej – iloczy elementów diagonalnych

Macierz dowrotna do macierzy daigonalnej – macierz kwadratowa, której elementy diagonalne są odwrotnością elementów diagonalnych

**Macierz jednostkowa** – elementy diagonalne są równe jeden, posotałe elementy to zero (eye())

**Macierz symetryczna** – macierz kwadratowa, A = AT

**Macierz antysymetryczna** – macierz kwadratowa, A = -AT

Każdą macierz kwadratową można rozłożyć na sumę macierzy symetrycznej i macierzy asymetrycznej

**Macierz górno- i dolno-trójkątna**

Wyznaczik – iloczyn elementów na głównej przekątnej

**Macierz dwu- i trój-diagonalna**

Gdy pojawi się element poza głównymi diagonalnymi:

* 2-krotny wzrost obliczeń arytmetycznych
* 60% wrzost obciążenia pamięci
* Pogorszenie oszacowania błędów zaokrągleń

**Równość macierzy** – te same wymiary i elementy są sobie równe

**Przekształcenia elementarne:**

* Wzajemna zamiana miejscami dwóch wierszy lub kolumn
* Przemnożenie wiersza lub kolumny przez niezerową stałą
* Dodanie wiersza do innego wiersza lub kolumny do kolumny

**Dodawanie i odejmowanie macierzy**

* Obie macierze muszą mieć ten sam rozmiar

Dodawanie i odejmowanie elementów na tych samych miejscach Mnożenie macierzy przez liczbę:

* Każdy element jest mnożony

**Mnożenie dwóch macierzy**

* Wymiary macierzy muszą być mxn i nxp

**Iloczyn skalarny dwóch wektorów**

* Skalar
* aTb = bTa

**Iloczyn tensorowy dwóch wektorów**

* abT

**Rząd macierzy**

**Macierz odwrotna**

* dla każdej mzacierzy nieosobliwej, istnieje macierz do niej odwrotna A-1

**Macierz ortogonalna**

* QT = Q-1
* Własności:
  + Macierz transponowana i macierz odwrotna do macierzy ortogonalnej jest macierzą ortogonalną
  + Wyznacznik : det(Q) = +-1

**Iloczy macierzy ortogonalnych jest macierzą ortogonalną Macierze podobne:**

* AT = TB
* T – macierz przejścia

**Aksjomanty normy**

* Każdemu wektorowi x i każdej macierzy A można przypisać liczbę ||x|| (normę x) i ||A|| (normę A)
* Normy na wektorach:
* Euklidesowa
* Maksimum
* Suma wartości bezwzględnych współrzędnych
* Normy na macierzach
* Spektralna
* Wierszowa
* Kolumnowa

**Wskaźnik uwarunkowania macierzy**

* Macierz A jest źle uwarunkowana gdy jej wyzancznik jest bliski zeru
* Cond(a) = ||A|| ||A-1||
* Macierz jest źle uwarunkowana gdy wskaźnik uwarunkowania jest duży, w przeciwnym wypadku – dobrze uwarunkowana

**Wyznaczik macierzy**

* Definiwany rekursywnie za pomocą rozwinięcia Laplace’a
* Wskaźnik macierzy 1x1 = wartość elementu
* Wskaźnik macierzy 3-go stopnia = reguła Sarrusa
* Możliwość policzenia wykorzystując przekształcenia elementarne
* Algorytm chio
* Reguły
  + det(A) = det(AT)
  + det(AB) = det(A)det(B)
  + zamiana miejscami 2-óch wierszy = znak wyznacznika zmienia się na przeciwny
  + dodanie do wiersza (kolumny) macierzy kwadartowej wielokrotoności innego wiersza (kolumny)nie zmienia wyznacznika tej macierzy

**Minor**

* Minor elementu aij wyznacznika stopnia n nazywamy wyznacznik stopnia n-1 macierzy powstałeś poprzez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny

**Dopełninie algebraiczne**

* Dopełniniem algebraicznym ^aij elementu aij macierzy A jest mnożony przez czynnik (-1)i+1 minor wyznaczony przez element aij

**Macierze blokowe**

* Dana macierz może być podzielona na bloki w dowolny sposób
* Dowolną macierz można podzielić na podmacierze
* Dodawanie i mnożenie wg zwykłych zasad (bloki jak elementy macierzy)
* Blokowo-diagonalna gdy bloki leżące poza główną przekątną są podmacierzami zerowymi, a bloki na przekątnej są macierzami kwadratowymi
  + Wyznacznik – iloczyn wyznaczików bloków na przekątnej

**Macierze dodatnio, półdodatnio i ujemnie określone**

* Kryterium Sylvestra

**Rozkład LU**

* Dowolna macierz kwadratowa A o wymiarzw n x n, której wszystie minory są niosobliwe może byc przedstawiona w postaci iloczynu dolnotrójkątnej L i górnotrójkątnej U
* Rozkład jest jednoznaczny gdy zostaną ustalone elementy na głównej przekątnej L lub U
* Metoda Doolittle
  + L -> Elementy na diagonali są jedynkami
  + Det(A) = det(LU) = det(L) det(U) = det(U)
  + Wyznaczanie kolejnych elementów macierzy L i U przeprowadza się naprzemiennie
* Metoda Crouta
  + U -> elementy na diagonali są jedynkami
  + Det(A) = det(LU) = det(L) det(U) = det(L)
* Rozkład Cholesky’ego
  + Jeśli macierz A jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona, to ma ona jedyny rozkład na czynniki A = LL-1, gdzie L jest macierzą trójkątną dolną o elementach dodatnich na głónej przekątnej

**Rozkład QR**

* Dowolna macierz kwadratowa A o wymiarze an x n może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy ortogonalnej Q i nieosobliwej macierzy trójkątnej R
* Rozkład jest jednoznaczny gdy zostana ustalone elementy na głównej przekątnej macierzy R
* Macierz Q jest ortogonalna gdy QT = Q-1
* Rozkład QR otrzymujemy przez zastosowanie przekształceń ortogonalnych
  + Odpowiednio dobranych obrotów Givensa
  + Przekształceń Householdera

**Macierz charakterystyczna**

**Wielomian charakterystyczny**

**Równanie charakterystyczne**

Wektory własne

Diagonalizacja macierzy

* Macierze A i B są podobne gdy AT = TB
  + T – macierz przejścia

**Tiwerdzenie Cayleya-Hamiltona**

* Każda macierz kwadratowa o wymierze n x n spłenia swoje równanie charakterystyczne
  + W(A) = 0
* Pozwala obliczyć potęgi macierzy o wiele prościej niże przez bezpośrednie mnożenia

**Metoda Reyleigha**

* obliczanie wartości własnych

**Układy równań liniowych**

* zgodny (rozwiązywalny) - posiada chociaż jedno rozwiazanie
* niezgodny (nierozwiązywalny, sprzeczny) - nie posaida rozwiązania
* oznaczony - posiadający jedno rozwiązanie
* nieoznaczony – więcej niż jedno rozwiązanie

**Układy równowazne**

* jeśli układ równań wynika z innego układu przez ciąg skończonu operacji elementarnych, to te dwa ukałdy są równoważne
* układy mają identyczne rozwiazania

**Operacje elementarne**

* wzajemna zamiana miejscami 2-óch rówań w układzie
* przemnożenie oby stron równania przez niezerową stałą
* dodanie stronami do rówanian wielokrotności innego równania

**Podział metod**

* metoda podstawiania
* metoda przeciwnych współczynników
* wzory Cramera
* metody eliminacj agaussa
* metoda eleiminacji Gaussa-Jordana
* metody wykorzystujące rozkłądy macierzy A

**Metody dokładne**

* rozwiązanie układu równań Ax = b polega na takim przekształcaniu danych A i b, że przy założeniu dokładnie wykonywanych obliczeń arytmetycznych po skończonej liczbie działań otrzymujemy rozwiązanie,
* mała liczba obliczeń
* dla zadań źle uwarunkowanych numerycznie wyznaczone rozwiązanie może być obarczone dużym błędem,
* nie dają błędu metody, ale mogą być niestabilne ze względu na błędy zaokrągleń,
* obciążają pamięć

**Gdy liczba niewiadomych równa się liczbie równań n = m**

* otrzymamy macierz kwadratową A n x n
* rozwiązanie x = A-1 \* b

**Układy rówań źle uwarunkowanych**

* Ax = b
* Gdy det(A) ~~ 0, jest to układ źle uwarunkowany
  + Bardzo małe zmiany w wyrazach współczynników mogą spowodować duże zmiany w rozwiązaniu
* Wskaźnik uwarunkowania – stopień uwarunkowania układu rówań
  + K = 1 – idealnie uwarunkowany
  + K = inf – układ osobliwy
  + K = ||A|| \* ||A-1||

**Wzory Cramera**

**Przyczyny błędów**

* błąd wejściowy – błąd spowodowany niedokładnymi wartościami współczynników układu równań,
* błąd zaokrągleń – błąd powstający na skutek popełniania błędów podczas numerycznego wykonywania działań arytmetycznych,
* błąd metody – błąd wyznaczania rozwiązania spowodowany sposobem działania metody.
* W przypadku stosowania metod dokładnych rozwiązywania układów równań liniowych mamy do czynienia z błędem wejściowym i błędem zaokrągleń.

**Metody eliminacji**

* Metoda eliminacji Gaussa
* Metoda eliminacji Gaussa-Crouta
* Metoda eliminacji Jordana
* Metoda Thomasa

**Metoda eleminacji Gaussa**

* Etap 1 – elminacja zmiennych (prosty przebieg metoday Gaussa)
  + Sprowadzenie układu do układu równowaznego z macierzą górnotrójkątną
* Etap 2 – wyznaczanie zmiennych (odwrotny przebieg metody Gaussa)
  + „Sprowadzenie układu do układu równowaznego z macierzą dolnotrójkątną”

**Metoda eliminacja Gaussa-Crouta**

* metoda eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego
* Przy założeniu dokładnych działań arytmetycznych w przypadku gdy istnieje jednoznaczne rozwiązanie układu Metoda Gaussa-Crouta jest metodą niezawodną (nie nastąpi zatrzymanie procesu obliczeń z powodu dzielenia przez zero)

**Metoda eliminacja Jordana**

* Stosując przekształcenia elementarne rozwiązywany układ równań liniowych sprowadzamy do układu równoważnego z macierzą jednostkową otrzymując gotowe rozwiązanie
* Nakład obliczeń w metodzie eliminacji Jordana jest ∼ 1.5 razy większy niż w metodzie eliminacji Gaussa.

**Metoda Thomasa dla układów z macierzą trójdiagonalną**

**Metody wykorzystujące rozkłądy macierzy**

* Rozkłąd LU
* Rozkład QR

Zwiększenie dokładności rozwiązania układów równań liniowych

Pseudorozwiązanie ukłądu równań liniowych

* A· x ≈ b
* Znak równości przybliżonej (≈) oznacza, że układ równań jest sprzeczny. Istnieje jednak nieskończenie wiele wektorów x których podstawienie pozwala zapisać układ w postaci:
  + A· x − b = ξ
  + ξ - oznacza wektor odchyłki.

**Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych**

**Stacjonarne metody iteracyjne**

* Stacjonarne metody iteracyjne polegają na rozkładzie macierzy A równania Ax = b na część M oraz R
  + Mx = Rx + b
* metoda Richardsona
  + W metodzie Richardsona przyjmujemy,że macierz M jest równa macierzy jednostkowej E.
  + Wzór iteracyjny przyjmie zatem postać: xk+1 = (E − A)xk + b
* metoda Jacobiego
  + Macierz A występująca w równaniu Ax = b może zostać podzielona na trzy części:
    - diagonalną,
    - ściśle dolną trójkątną
    - ściśle górną trójkątną
    - A = L + D + U
* metoda Gaussa-Seidla
  + W metodzie Gaussa–Seidela macierz
    - M = L + D
    - Z = −U.
* Metoda nadrelaksacji (SOR)

**Metoday przybliżone:**

* metoda Richardsona.
* Metoda iteracji prostej (metoda Jacobiego).
* Metoda Gaussa-Seidela
* Metoda nadrelaksacji
* Metoda najszybszego spadku.
* Metoda gradientów sprzężonych

**Metody przybliżone:**

* rozwiązanie układu równań Ax = b otrzymujemy w postaci ciągu wektorów zbieżnych do rozwiązania dokładnego,
* obliczenia przerywamy gdy przybliżone rozwiązanie osiągnęło wymaganą dokładność albo po ustalonej liczbie iteracji,
* dla dużych układów (tysiące równań) szybsze niż metody dokładne,
* efektywne dla układów rzadkich, stabilne,
* błędy zaokrągleń są wygaszane w dalszych iteracjach.